

SUR LA THÉORIE DES IMMERSIONS

VALENTIN POÉNARU

(Received 30 July 1961 and in revised form 10 January 1962)

CE TRAVAIL contient une série de résultats sur la théorie des immersions. Dans une certaine mesure il peut être considéré comme la suite du second chapitre d'un article antérieur [6]. Mais sa lecture ne suppose aucunement connu [6].

Par immersion on entend comme d'habitude une application différentiable de rang maximum. Comme on sait la relation d'équivalence homotopique habituelle n'est pas assez fine pour les immersions. On doit la remplacer par la notion d'homotopie régulière. Une homotopie régulière est une homotopie qui à chaque étape est une immersion et telle que l'espace tangent varie d'une façon continue.

Le premier chapitre contient le lemme suivant: si deux immersions sont régulièrement homotopes on peut toujours modifier l'homotopie de telle façon qu'elle devienne de classe C^∞ par rapport à l'ensemble des variables, tout en restant régulière.

Le second chapitre contient la solution du problème suivant: classer par la relation d'homotopie régulière les figures constituées par des sphères k -dimensionnelles immergées dans une variété de dimension n ($n > k$) et r sections orthonormales de leur fibré normal.

La solution est exprimée en termes d'homotopie de certains espaces fibrés. Les démonstrations utilisent d'une façon essentielle la théorie de Smale [8] ainsi que l'exposé que Thom en a donné au Séminaire Bourbaki. On introduit une suite d'invariants Ω^i ($i = 0, 1, 2, \dots$) tels que l'invariant 0-dimensionnel, Ω^0 coïncide avec l'invariant Ω de Smale. Le chapitre II pourrait être exposé aussi d'une autre manière: en généralisant tout d'abord la théorie de Smale en posant V_n au lieu de E_n , puis en relevant l'homotopie de cette théorie en une homotopie de sections normales. Mais je pense que la voie choisie ici est plus commode.

Les chapitres III et IV contiennent quelques applications. Ils sont plus ou moins une version de la théorie de Hirsch [3]. On y trouve notamment la solution d'une conjecture de Ehresmann [2] et l'intégration d'une certaine type d'inégalités différentielles globales.

Le chapitre V contient le résultat qui est probablement le plus intéressant de ce travail:

“Toute variété parallélisable, ouverte de dimension n peut être immergée dans E_n .”

Pour $n = 3$ le théorème est déjà établi par Whitehead dans un de ses derniers mémoires [13]†. Si l'on fait tomber l'hypothèse que la variété est ouverte, mais on remplace E_n par E_{n+1} on obtient un théorème de Hirsch [3].

† Même le cas général a été prouvé très récemment par Hirsch [15].

L'idée de la démonstration est de construire une théorie d'obstructions qui s'expériment successivement à l'aide des invariants construits dans le second chapitre.

Enfin, il est à remarquer que pour les variétés à 3 dimensions, l'invariant Ω^1 est intimement lié à l'invariant $a(h)$ de [7] on à l'invariant m de [6].

Ces invariants (comme une construction de même nature de [13]) sont définis d'une manière "élémentaire", c'est-à-dire non par l'homotopie des variétés de Stiefel (ou plus généralement des fibrés à fibre variété, de Stiefel associés au fibré tangent) mais par l'homologie du bord du tube de S_1 dans V_3 . Dans ce bord, le champ transversal à S_1 , qu'on étudie, induit une sous-variété homéomorphe à S_1 dont la classe d'homologie dans le bord du tube est étudiée. Il n'est pas difficile de montrer pour ce cas l'équivalence de la théorie "élémentaire" avec celle présentée ici. Une théorie "élémentaire" pour le cas général ne semble pas dépourvue d'intérêt.

§1. UN LEMME DE LA THÉORIE DES IMMERSIONS

Soient M_k, V_n des variétés différentiables.

D'après Smale [1], nous allons dire qu'une homotopie $f_t : M_k \rightarrow V_n$ est régulière si : pour t fixé quelconque, f_t est régulière (c'est-à-dire que c'est une immersion) l'homotopie induite pour le fibré tangent est continue.

Thom a prouvé, suivant une idée de Whitney, le lemme suivant [2, lemme IV-5], "*Si deux applications f_0, f_1 de classe C^m de M_k dans V_n sont homotopes, on peut les relier par une homotopie de classe C^m .*"

Dans cette note nous allons prouver le lemme suivant, qui est en quelque sorte un analogue du lemme de Thom :

LEMME. "*Soient f_0 et f_1 deux immersions de classe C^∞ de M_k dans V_n . Supposons M_k compacte et f_0, f_1 régulièrement homotopes. Dans ces conditions il existe une homotopie régulière f_t , reliant f_0 et f_1 qui soit de classe C^∞ dans l'ensemble des variables (x, t) .*"

Démonstration. On considère V_n , plongée par, une application de classe C^∞ , ϕ , dans E_p (p suffisamment grand). Soit T_p le tube de V_n dans E_p . T_p est un fibré, de fibre E_{p-n} ; c'est une variété différentiable ouverte (la structure différentiable est induite par celle de E_p) et la projection $\pi : T_p \rightarrow V_n$ est de classe C^∞ .

Choisissons un recouvrement (U_i) , ouvert, fini, de $[0, 1]$ (l'intervalle de variation de t), assez petit (on verra plus loin "l'ordre" exact de grandeur de (U_i)) tel que :

il y a un intervalle de (U_i) et un seul qui contienne un certain voisinage (assez petit) de $0 \in [0, 1]$; de même pour $1 \in [0, 1]$.

un point quelconque de $[0, 1]$ est contenu dans deux ensembles de (U_i) au plus.

Soit $e_i(t)$ une partition indéfiniment différentiable de 1, subordonnée à (U_i) . Attachons à chaque $U_i \in (U_i)$ un point p_i défini ainsi :

- si $0, 1 \notin U_i$, $p_i =$ milieu de U_i
- si $0 \in U_i$, $p_i = 0$
- si $1 \in U_i$, $p_i = 1$

Considérons l'application $F(t, x) : [0, 1] \times M_k \rightarrow V_n$ définie par la formule suivante :

$$F(t, x) = \Pi \left[\sum_i e_i(t) \phi(f_{p_i}(x)) \right]$$

Je dis que $F(t, x)$ a les propriétés de l'énoncé. Tout d'abord il faut vérifier que $F(t, x)$ est bien défini. Pour cela il faut que

$$\sum_i e_i(t) \phi(f_{p_i}(x)) \in T_p$$

Ceci est bien possible, vu que M_k est compacte, si (U_i) est assez petit.

D'autre part, vu que 0, 1 ne sont contenus que dans un seul $U_i \in (U_i)$, $F(t, x)$ coïncide avec f_0 et f_1 dans des petits voisinages de 0, 1. $F(t, x)$ est continue; c'est bien une homotopie reliant f_0, f_1 . On doit encore prouver qu'elle est de classe C^∞ dans l'ensemble des variables, que pour t fixé elle est une immersion, que l'homotopie induite pour les fibrés tangents est continue.

La première assertion est évidente.

Nous allons prouver, que, pour t fixé, $F(t, x)$ est une immersion. Soient ξ_1, \dots, ξ_k un système de vecteurs tangents à M_k en $x \in M_k$, linéairement indépendants.

Pour t fixé, $F(t, x)$ s'écrit :

$$F(t, x) = \Pi [\mu \phi(f_{p'}(x)) + \lambda \phi(f_{p''}(x))]$$

où $\lambda, \mu \geq 0$, $\lambda + \mu = 1$, p', p'' assez voisins de t . Comme $f_{p'}, f_{p''}$ sont deux immersions et ϕ un plongement, $\phi(f_{p'}(\xi_i))$, $\phi(f_{p''}(\xi_i))$ sont des vecteurs tangents à $V_n \subset E_p$ en $\phi(f_{p'}(x))$, $\phi(f_{p''}(x))$ respectivement.

De plus :

$$\phi(f_{p'}(\xi_1)) \wedge \phi(f_{p'}(\xi_2)) \wedge \dots \neq 0$$

$$\phi(f_{p''}(\xi_1)) \wedge \phi(f_{p''}(\xi_2)) \wedge \dots \neq 0$$

Si (U_i) est assez petit, $\phi(f_{p'}(\xi_i))$ et $\phi(f_{p''}(\xi_i))$ diffèrent aussi peu que l'on veut.

$\Pi [\mu \phi(f_{p'}(\xi_i)) + \lambda \phi(f_{p''}(\xi_i))]$ sont des vecteurs tangents à $V_n \subset E_p$ en $\Pi (\mu \phi(f_{p'}(x)) + \lambda \phi(f_{p''}(x)))$

Il faut prouver que :

$$(*) \wedge_i \Pi [\mu \phi(f_{p'}(\xi_i)) + \lambda \phi(f_{p''}(\xi_i))] \neq 0$$

Tout d'abord, vu que $\mu + \lambda = 1$, $\mu, \lambda \geq 0$ et que $\phi(f_{p'}(\xi_i))$, $\phi(f_{p''}(\xi_i))$ sont assez proches :

$$\wedge_i [\mu \phi(f_{p'}(\xi_i)) + \lambda \phi(f_{p''}(\xi_i))] \neq 0$$

aussi, $\Pi [\mu \phi(f_{p'}(\xi_i)) + \dots]$ diffère, si (U_i) est assez petit, aussi peu que l'on veut de $\phi f_{p'}(\xi_i)$, d'où (*).

On voit facilement que pour l'homotopie ainsi construite l'espace tangent varie d'une façon C^∞ en t . La démonstration est ainsi terminée.

On voit donc, que si f, g sont deux immersions $S_k \rightarrow E_n$ telles que l'invariant de Smale $\Omega(f, g) = 0$, f, g peuvent être reliées par une homotopie régulière de classe C^∞ , en (x, t) .

Enfin, remarquons que par un raisonnement analogue, on peut prouver la proposition suivante :

PROPOSITION. Soit I^m un cube et $F(t_1, \dots, t_m; x) : I^m \times M^k \rightarrow V^n$ une application telle que pour chaque système $t_1^\circ, \dots, t_m^\circ$, fixé, $F(t_1^\circ, \dots, t_m^\circ; x)$ est une immersion, et que l'espace tangent varie continuellement. Supposons aussi que $F(t_1, \dots, t_m; x)$ soit de classe C^∞ en (t, x) dans un voisinage de I^m .

Il existe alors une application $\Phi(t_1, \dots, t_m; x) : I^m \times M^k \rightarrow V^n$ de classe C^∞ en (t, x) , aussi proche de F que l'on veut, et telle que:

$$F|_{I^m} = \Phi|_{I^m}$$

pour $t_1^\circ, \dots, t_m^\circ$ fixés, quelconques, Φ est une immersion.

Ceci nous dit que si l'on considère l'espace $\mathcal{E}(M^k, V^n)$ des immersions de M^k dans V^n , avec sa C^p -topologie, toute sphère singulière de cet espace, à point de base, peut être approchée aussi près que l'on veut par une sphère de classe C^∞ , à même point de base.

§2. L'INVARIANT $\Omega^r(f, g)$

1. Introduction.

Nous allons considérer une variété différentiable V_n , donnée une fois pour toutes. Nous allons appeler (k, r, p) - M_k -figure ($k + r \leq n$, $k < n$) le couple constitué de la façon suivante:

- (a) une immersion ϕ , de M_k , variété différentiable de dimension k , dans V_n .
- (b) r champs transversaux, indépendants, de classe C^p , dans le fibré normal à M_k : $f_i (i = 1, 2, \dots, r)$.

Les théorèmes classiques d'approximation des sections par des sections de classe C^∞ [8] ainsi qu'un raisonnement de Thom [12, lemme IV.5] nous montrent que dans tout ce qui s'ensuit, p ne joue aucun rôle. Toute homotopie de deux (k, r, ∞) -figures dans l'espace des $(k, r, 0)$ -figures pourra être remplacée par, une homotopie de (k, r, ∞) -figures. On pourra donc toujours supposer que $p = \infty$. Nous omettrons donc de parler dorénavant de (k, r, p) - M_k -figures, il s'agira dans ce qui s'ensuit seulement de (k, r, ∞) - M_k -figures, que nous désignerons pour la commodité par (k, r) - M_k -figures. Enfin, une (k, r) - S_k -figure, sera appelée, tout simplement, (k, r) -figure.

Une homotopie $\bar{\phi}_t$ de (k, r) - M_k -figures, sera par définition, une homotopie régulière de M_k , ϕ_t^\dagger et une collection d'homotopies $(f_i)_t (i = 1, 2, \dots, r)$, telles que $\{(f_i)_t\}$ soient des sections avec les propriétés (b) du fibré normal à $\phi_t(M_k)$.

Une homotopie régulière de (k, r) -figures sera dite "basique" si pendant l'homotopie ϕ_t et $(f_i)_t$ sont fixés sur le pôle sud de S_k . D'une façon analogue on définit une (k, r) -figure "basique".

Soient F, G deux (k, r) -figures basiques et $E_{k+r}(V_n)$ le fibré des $(k + r)$ -repères linéairement indépendants, tangents à V_n . Par une homotopie régulière, assez petite, on peut toujours faire de telle sorte, que les (ϕ, f_i) de F, G respectivement, coïncident sur un petit

† D'après Smale [8] on entend par homotopie régulière une homotopie qui à chaque étage est une immersion et de plus, telle que l'homotopie induite pour le fibré tangent soit continue.

voisinage W (difféomorphe à un disque) du pôle Sud de S_k . Les F, G induisent respectivement sur $S_k\text{-int } W$ des applications $(S_k\text{-int } W) \rightarrow E_{k+r}(V_n)$, qui coïncident sur FrW . On obtient ces applications ainsi : les premiers h vecteurs sont un repère tangent, respectivement à $\phi_F(S_k - \text{int } W)$, $\phi_G(S_k - \text{int } W)$; les autres r vecteurs sont les f_i respectifs.

Ainsi, à deux (k, r) -figures basiques F, G , on associe une application $S_k \rightarrow E_{k+r}(V_n)$. La classe d'homotopie de cette application est un élément $\Omega'(f, g) \in \pi_k(E_{k+r}(V_n))$.

Si $V_n = E_n$, $r = 0$ on obtient $\Omega^0(F, G)$ qui coïncide avec l'invariant $\Omega(F, G)$ de Smale [8].

Nous allons prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 1. *Deux (k, r) -figures basiques, F, G , sont basiquement régulièrement homotopes si et seulement si $\Omega'(F, G) = 0$. Si $\alpha \in \pi_k(E_{k+r}(V_n))$ et une (k, r) -figure basique F sont donnés, il existe une (k, r) -figure basique G , telle que $\Omega'(F, G) = \alpha$.*

Remarques. (1) Si $\pi_1(E_{k+r}(V_n)) = 0$ le théorème reste vrai si l'on efface le mot basique chaque fois qu'il apparaît.

(2) On peut définir d'une façon naturelle une structure de groupe (abélien si $k > 1$ ou si V_n est parallélisable) sur les (k, r) -figures basiques. (Voi re par exemple [4]).

Cette structure de groupe est compatible avec la relation d'homotopie basique. En passant au quotient, on obtient un groupe qui est naturellement isomorphe à $\pi_k(E_{k+r}(V_n))$.

Pour prouver le théorème 1 on fera grand usage du travail de Smale [8] ainsi que de l'exposé qu'en a donné Thom [11].

2. Le relèvement des homotopies pour les espaces de (k, r) -figures.

Soit E_k^r l'espace des (k, r) - B_k -figures basiques.† Il existe une projection naturelle : $\pi : E_k^r \rightarrow S_{k-1}^{r+1}$ où, par S_k^r on désigne l'espace des (r, k) -figures basiques. Cette projection π est obtenue ainsi : Si $(\phi; f_1, \dots, f_r) \in E_k^r$ $\pi(\phi; f_1, \dots, f_r) = (\bar{\phi}; \bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{r+1}) \in S_{k-1}^{r+1}$ est défini ainsi : ϕ est la restriction de ϕ à \dot{B}_k ; \bar{f}_1 est le champ induit sur $\bar{\phi}(S_{k-1})$ en dérivant $\phi(B_k)$ dans une direction radiale $\bar{f}_2, \dots, \bar{f}_{r+1}$ sont les restrictions de f_1, \dots, f_r .

LEMME 1. *$(E_k^r, \pi, S_{k-1}^{r+1})$ est un fibré de Serre, c'est-à-dire qu'il admet le relèvement des homotopies pour les cubes.*

Démonstration. Soit une homotopie $h_v^\circ : P \rightarrow S_{k-1}^{r+1}$ où $v \in [0, 1]$ et P est un cube. Supposons que pour chaque $p \in P$, $h_0^\circ(p) \in S_{k-1}^{r+1}$ est recouverte par un $\bar{h}(p) \in E_k^r$ (c'est-à-dire que $\pi\bar{h}(p) = h_0^\circ(p)$). On remarquera que par définition $f_1(p)$ est le champ de vecteurs transversal à $h_0^\circ(p)$ induit par $\bar{h}(p)$.

Considérons la projection : $\pi' : S_{k-1}^{r+1} \rightarrow S_{k-1}^1$ obtenue en effaçant les derniers r champs : f_2, f_3, \dots, f_{r+1} . Alors, un théorème de Thom [11] nous assure que le cube singulier $\pi' \circ h_v^\circ : P \rightarrow S_{k-1}^1$ peut être relevé en un cube $h'_v : P \rightarrow E_k^r$; $h'_0(p) \in E_k^r$ sera $\bar{h}(p) \in E_k^r$ auquel on aura effacé les champs transversaux. La démonstration sera terminée si l'on construit un système indépendant de r champs, transversaux, (et différentielles), à chaque $h'_v(p)$, qui

† Le "point de base" sera un point de la frontière de B_k .

dépendent continuellement de (v, p) , et qui coïncident avec les champs déjà donnés pour $v = 0$, $x \in Frh'_v(p)((v, p)$ quelconques). Pour cela on procède de la manière suivante. On considère l'espace $[0, 1] \times P \times B_k = X$. Soit Y le fibré des k -plans tangents à V_n , et Z le fibré, de base X , obtenu en considérant les paires constituées par un k -plan tangent et r vecteurs tangents à V_n , au même point, indépendants entre eux, et transversaux au plan. On a une application naturelle $\psi : X \rightarrow Y$ obtenue en considérant le plan tangent à $h'_v(p)(B_k)$ en $h'_v(p)(x)$. Soit π_1 la projection $Z \rightarrow Y$. Soit Z' le fibré induit par ψ sur X et π_2 sa projection. On considère pour Z' la définition suivante [9]: $Z' = \{x', z\}$ où $x' \in X$, $z \in Z$, $\psi(x') = \pi_1(z)$.

On voit bien que l'application fibrée $\bar{\psi} : Z' \rightarrow Z$ (qui recouvre ψ) est de classe C^∞ dans les variables qui correspondent à B_k .

L'espace fibré (trivial) (Z', X) , admet une section audessus de $(0 \times P \times B_k) \cup ([0, 1] \times P \times S_k) = X_1$ (il s'agit de la section dont on a parlé plus haut). X_1 est une rétracte de déformation de X , donc cette section se prolonge à une section $s(x')$ audessus de X . Supposons que l'on a construit $s(x')$ de telle façon qu'elle soit de classe C^∞ dans les variables qui correspondent à B_k . Alors, en attachant à $h'_v(p)(x)$ le repère $s(v, p, x)$, la démonstration est terminée.

Reste donc à prouver seulement que l'on peut s'arranger de telle façon que $s(x')$ soit de classe C^∞ dans les variables qui correspondent à B_k . On remarque que la fibre de Z' est une variété de Stiefel $V_{n-k,r}$. Plongeons-la d'une manière indéfiniment dérivable dans un espace euclidien E_N , de dimension suffisamment grande. Soit ψ^\times le plongement, T_N de tube de $\psi^\times(V_{n-k,r})$ dans E_N , π^\times la projection d'espace fibré $\pi^\times : T_N \rightarrow V_{n-k,r}$.

La section donnée sur X_1 , composée avec ψ^\times , donne une application $X_1 \rightarrow E_N$, que l'on écrit, en utilisant les coordonnées cartésiennes de E_N :

$$x_1 = F_1(v, p, x)$$

$$x_2 = F_2(v, p, x)$$

$$\vdots$$

$$x_N = F_N(v, p, x)$$

Nous allons considérer deux voisinages assez petits, $\bar{\mathcal{V}}$ et \mathcal{V} de X_1 dans X , tels que $\bar{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}$ et $\mathcal{V} - \bar{\mathcal{V}}$ sépare X_1 de $X - \mathcal{V}$. Sur \mathcal{V} on prolongera chaque fonction F_i de telle manière que:

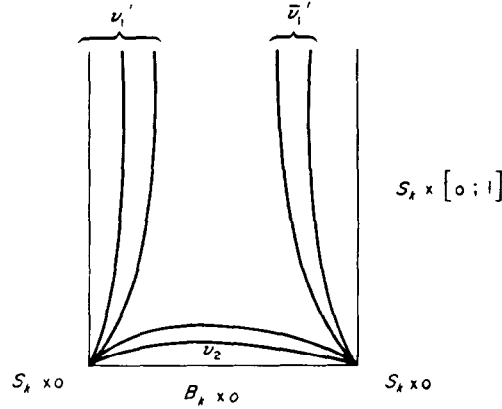
1° sur $\mathcal{V} - \bar{\mathcal{V}}$, F_i soit de classe C^∞ .

2° F_i soit de classe C^∞ dans les variables qui correspondent à B_k .

On peut toujours supposer que l'application $\mathcal{V} \rightarrow E_N$ ainsi obtenue, a ses valeurs dans T_N . Alors, en composant avec π^\times , on obtient une application $\mathcal{V} \rightarrow V_{n-k,r}$ qui a les propriétés 1°-2°, donc une section au-dessus de \mathcal{V} qui ait ces propriétés. Ceci nous permet, en utilisant les techniques classiques [9], de construire $s(x')$ telle que nous la désirons.

On a donc seulement à prouver que le prolongement de chaque F_i est possible. Considérons tout d'abord l'ensemble $B_k \times [0, 1]$. Dans cet ensemble considérons deux voisinages disjoints de $S_k \times [0, 1]$, $B_k \times 0 : \mathcal{V}'_1, \mathcal{V}'_2$ définis respectivement par des surfaces de classe C^∞ , se coupant le long de $S_k \times 0$.

En ce qui concerne \mathcal{V}'_1 , on y amboîtera une surface "parallèle" à $Fr\mathcal{V}'_1$ qui n'ait en commun avec $Fr\mathcal{V}'_1$ que $S_k \times 0$. Cette surface engendre un nouveau voisinage $\overline{\mathcal{V}}'_1 \subset \mathcal{V}'_1$ tel que $\mathcal{V}'_1 - \overline{\mathcal{V}}'_1$ sépare $S_k \times]0, 1]$ du reste. De même on prend $\overline{\mathcal{V}}'_2 \subset \mathcal{V}'_2$ (voir Fig. 1).



On prolongera tout d'abord F_i sur les ensembles $\mathcal{V}'_1 \times P = \mathcal{V}'_1$, $\mathcal{V}'_2 \times P = \mathcal{V}'_2$ avec les propriétés de régularité requises.

Puis, il est facile de prolonger F_i autour de "l'angle" $S_k \times P \times 0$ de façon indéfiniment dérivable (à l'exception de cet angle), d'une façon compatible avec les prolongements déjà définis sur \mathcal{V}'_1 et \mathcal{V}'_2 .

Le prolongement sur \mathcal{V}'_2 est aisé à réaliser. Reste à faire le prolongement sur \mathcal{V}'_1 . On procède de la manière suivante: on recouvre tout d'abord $\mathcal{V}'_1 - \overline{\mathcal{V}}'_1$ avec une suite d'ouverts U_i , tels que: le recouvrement soit localement fini, les U_i "s'accumulent" vers $S_k \times 0$, $\cup(U_i)$ soit assez proche de $\mathcal{V}'_1 - \overline{\mathcal{V}}'_1$, $(\cup(U_i)) \cap ((S_k \times [0, 1]) \cup (B_k \times 0)) = \emptyset$. On considère puis, des ouverts V_i , tels que $V_i \supset \overline{U}_i$ et tels que le recouvrement (V_i) ait les propriétés de (U_i) .

Posons sur B_k le système de "coordonnées polaires": τ (rayon) y_1, \dots, y_{k-1} (coordonnées de S_{k-1}). Prolongeons tout d'abord $F_i(x)$ définie sur $S_k \times [0, 1] \times P$ sur $\mathcal{V}'_1 \cup (UV_i)$ en posant:

$$\bar{F}_i(t, p, \tau, y_1, \dots, y_{k-1}) = F_i(t, p, y_1, \dots, y_{k-1})$$

\bar{F}_i est évidemment de classe C^∞ dans les variables qui correspondent à B_k . On va modifier \bar{F}_i sur $V_1, V_2 \cup V_2, V_1 \cup V_2 \cup V_3, \dots$ de telle manière que les sections modifiées, $(\bar{F}_i)_1, (\bar{F}_i)_2, \dots$ aient les propriétés suivantes: $-(\bar{F}_i)_j$ est aussi proche que l'on veut de \bar{F}_i

$$(\bar{F}_i)_j = \bar{F}_i \text{ sur } C(V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_j)$$

$$(\bar{F}_i)_j \text{ est de classe } C^\infty \text{ sur } U_i \cup U_2 \cup \dots \cup U_j$$

$$(\bar{F}_i)_j \text{ est de classe } C^\infty \text{ dans les variables qui correspondent à } B_k.$$

Supposons que $(\bar{F}_i)_j$ soit déjà construite. On construit $(\bar{F}_i)_{j+1}$ de la façon suivante: On considère une fonction de classe C^∞ qui soit assez proche de \bar{F}_i sur \overline{V}_{j+1} , $\phi(t, p, x)$ et une fonction de classe C^∞ , $\psi(t, p, x)$ égale à 1 sur \overline{U}_{j+1} à 0 sur $C\overline{V}_{j+1}$. On pose:

$$(\bar{F}_i)_{j+1}(t, p, x) = (1 - \psi)(\bar{F}_i)_{j+1} + \psi\phi.$$

On voit bien que $(\bar{F}_i)_{j+1}$ a les propriétés requises. Maintenant il est facile de continuer la démonstration.

3. Un théorème d'équivalence homotopique faible.

Nous allons dire que deux espaces sont faiblement homotopiquement équivalents s'il existe une application continue qui met en correspondance biunivoque les composantes connexes par arcs et qui induit un isomorphisme des groupes d'homotopie pour chaque composante.

Désignons par $\Gamma'_k(f_0)$ l'espace des $(k, r) - B_k$ -figures (avec la C^2 -topologie) telles que $d\phi, \phi, f_1, \dots, f_r$ coïncident sur S_{k-1} avec $d\phi, \phi, f_1, \dots, f_r$ d'une certaine $(k, r) - B_k$ -figure.

Soit un système de coordonnées cartésiennes x_1, \dots, x_k sur B_k . A toute $(k, r) - B_k$ -figure on attache une application $B_k \rightarrow E_{k+r}(V_n)$ définie de la façon suivante:

$$\phi^r(x) = (\phi_{x_1}(x), \dots, \phi_{x_k}(x), f_1(x), \dots, f_r(x))$$

Soit $(\Gamma'_k)'$, l'espace des applications $B_k \rightarrow E_{k+r}(V_n)$ qui coïncident avec $\Phi^r(f_0)$ sur S_{k-1} .

D'après Smale [8], nous allons prouver le lemme suivant:

LEMME 2. " $\Phi^r : \Gamma'_k(f_0) \rightarrow (\Gamma'_k)'(f_0)$ est une équivalence homotopique faible."

D'une façon analogue à la définition des espaces $\Gamma'_k(f_0), (\Gamma'_k)'(f_0)$, on introduit $S_k^r(g_0), (S_k^r)'(g_0)$ en considérant des $(k, r) - S_k$ -figures au lieu de $(k, r) - B_k$ -figures.

On prouve d'abord que si $\Phi^r : \Gamma'_k(f_0) \rightarrow (\Gamma'_k)'$ est une équivalence homotopique faible, il en est de même pour $\Psi^{r+1} : S_k^{r+1}(g_0) \rightarrow (S_k^{r+1})'(g_0)$. Les applications $(\phi, f_1, \dots, f_{r+1})$ sont fixées sur l'hémisphère sud, Ψ^{r+1} est définie seulement sur l'hémisphère nord. (C'est l'application analogue à Φ^r). On considère $\Gamma^\times \subset \Gamma$, le sous espace tel que les jets de tout ordre sur S_{k-1} coïncident avec ceux de f_0 et l'on voit que cette inclusion est une équivalence homotopique faible. On considère alors le diagramme:

$$\begin{array}{ccc} S_k^{r+1} & \xrightarrow{\Psi} & (S_k^{r+1})' \\ p \downarrow & & p' \downarrow \\ (\Gamma^*)'_k & \xrightarrow{\Phi} & (\Gamma'_k)' \end{array}$$

(les projections p, p' sont définies en considérant les $\phi, f_1, \dots, f_{r+1}$ qui définissent $e \in S_k^{r+1}$ restreints à l'hémisphère nord, et en effaçant f_1 , de même pour p').

L'implication que nous désirons prouver, résulte de la suite exacte d'homotopie et du 'five lemma' si l'on montre que $(S, p, \Gamma^\times), (S', p', \Gamma')$ sont des espaces fibrés de Serre, et 'que Ψ induit un homéomorphisme de fibres. On prouve ces assertions en utilisant les raisonnements de Smale.

On prouvera maintenant que si $\Psi^{r+1} : S_k^{r+1}(g_0) \rightarrow (S_k^{r+1})'(g_0)$ est une équivalence homotopique faible, il en est de même pour $\Phi^r : \Gamma'_k(g_0) \rightarrow (\Gamma'_k)'(g_0)$. (De cette assertion et de la précédente, le théorème d'équivalence faible s'ensuit sans peine, car le premier pas de l'induction est trivial.)

Soit E l'espace de toutes les $(k, r) - B_k$ -figures, qui est évidemment contractible (car il s'agit de $(k, r) - B_k$ -figures basiques). C'est un fibré de Serre sur S , dont la fibre F est faiblement homotopiquement équivalente à Γ . On a donc, en écrivant la suite exacte d'homotopie, une série de bimorphismes (la ligne horizontale supérieure du diagramme (x)):

$$(x) \quad \begin{array}{ccccccc} \pi_i(S) & \xleftarrow{\pi} & \pi_i(E, F) & \xrightarrow{\Delta} & \pi_{i-1}(F) & \xrightarrow{\alpha_1} & \pi_{i-1}(\Gamma) \\ \Psi \downarrow & & \phi \downarrow & & \bar{\phi} \downarrow & & \Phi \downarrow \\ \pi_i(S') & \xleftarrow{\pi'} & \pi_i(E', F') & \xrightarrow{\Lambda'} & \pi_{i-1}(F') & \xrightarrow{\alpha'_1} & \pi_{i-1}(\Gamma') \end{array}$$

Considérons de même les espaces E', F', S', \dots obtenus en considérant les applications dans $E(V_n)$. On montre par des raisonnements standard que (E', π', S') est un fibré, de Serre. Sa fibre a évidemment le même type d'homotopie que Γ' , en même temps il est évident que E' est contractible.

Les flèches horizontales sont donc des bimorphismes (il s'agit maintenant des flèches horizontales inférieures). Comme le diagramme est commutatif et Ψ est un bimorphisme, Φ est un bimorphisme aussi.

En ce qui concerne le théorème 1, il résulte aisément de ce lemme.

Remarque: Avant d'aller plus loin, nous devons faire la remarque suivante: au lieu de la démonstration donnée ci-dessus au théorème 1, on aurait pu procéder de la façon suivante: En utilisant le théorème du relèvement des homotopies de Smale [8], on aurait pu (en se servant d'une partition de l'unité, de classe C^∞) prouver le relèvement des homotopies pour les cubes de classe C^∞ . Car, si l'on utilise les cubes de classe C^∞ , la partition de l'unité réduit le problème général du relèvement des homotopies à problème "local", que le théorème de Smale permet justement de résoudre. Alors, la remarque de la fin du premier chapitre nous montre que (E, π, S) est un espace quasi-fibré au sens de Dold et Thom [1]. La suite du raisonnement se fait comme ci-dessus.

§3. QUELQUES APPLICATIONS

1. Construction d'une immersion avec certaines conditions aux limites:

Nous allons d'abord prouver le théorème suivant:

THÉORÈME 3. Soit $n > k + 1$, $k + r \leq n$, $e \in S_{k-1}^{r+1}$ la projection par π d'un élément donné, une fois pour toutes de E_k^r . Soit de même $f \in S_{k-1}^{r+1}$, quelconque. $f \in \pi(E_k^r)$ si et seulement si $\Omega^r(e, f) = 0$.

Démonstration. Si $\pi f' = f$ on utilise le fait que E est connexe par arcs pour voir que $\Omega^r(e, f) = 0$. De même, si $\Omega^r(e, f) = 0$ on voit, en utilisant deux relèvements d'homotopies successifs que $f \in \pi(E)$. A ce sujet, le lemme suivant pourrait présenter quelque intérêt.

LEMME 3. Soit une $(k, 1)$ -figure de $V_n : (\phi, f_1)(n > k + 1)$. Alors les deux situations suivantes sont équivalentes (c'est-à-dire qu'elles arrivent en même temps):

(a) il existe une immersion $\phi_1 : B_{k+1} \rightarrow V_n$ telle que $\phi_1|_{S_k} = \phi$, le plan tangent à $\phi_1(B_{k+1})$ en $\phi(p)$ ($p \in S_k$) est engendré par $f_1(p)$ et le plan tangent à $\phi(S_k)$.

(b) il existe une $(k+1, 1)$ - B_{k+1} -figure (ϕ', f'_1) telle que $\phi'|_{S_k} = \phi, f'_1|_{S_k} = f_1$.

Démonstration. Nous allons prouver que (b) implique (a) (d'une façon "duale" on peut prouver que (a) implique (b)).

La $(k+1, 1)$ - B_{k+1} -figure (ϕ', f'_1) induit un fibré $B_{k+1} \times [0, 1]$ et une immersion $\psi : B_{k+1} \times [0, 1] \rightarrow V_n$ telle que:

$$\begin{aligned}\psi(B_{k+1} \times 0) &= \phi' \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} \Big|_{t=0} (B_{k+1} \times t) &= f'_1 \\ \psi(l \times t) &= \text{arc de géodésique}\end{aligned}$$

Dans $B_{k+1} \times [0, 1]$ on considère un plongement $\psi^* : B_{k+1} \rightarrow B_{k+1} \times [0, 1]$, de classe C^∞ , qui ait les propriétés suivantes (on introduit des coordonnées polaires) sur $B_{k+1} : r \in [0, 1], x_1, \dots, x_k \in S_k$

$$\begin{aligned}\psi^* (\{r \geq \tfrac{3}{4}\}) &= S_k \times [0, \tfrac{1}{2}] \\ \psi^* (\{r \leq \tfrac{1}{2}\}) &= \{r \leq \tfrac{1}{2}\} \times 1 \\ \psi^* (\{\tfrac{1}{2} < r < \tfrac{3}{4}\}) &\subset \text{int}(B_{k+1} \times [0, 1])\end{aligned}$$

On laisse au lecteur le soin de construire un tel ψ^* (qui a une certaine analogie avec le strengthening an angle round a corner de Milnor [5]). On obtient (a) en posant tout simplement: $\phi = \psi \circ \psi^*$.

CORROLLAIRE. Soit f une $(k, 1)$ -figure constituée par une immersion $\phi : S_k \rightarrow V_n (n > k+1)$ et un champ transversal $\vec{\phi}(p)$. Pour qu'il existe une immersion $\phi_1 : B_{k+1} \rightarrow V_n$ telle que:

- (1) $\phi_1|_{S_k} = \phi$.
- (2) le plan tangent à $\phi_1(B_{k+1})$ en $\phi(p) (p \in S_k)$ est engendré par $\vec{\phi}(p)$ et le plan tangent à $\phi(S_k)$ en $\phi(p)$,

il faut et il suffit que $\Omega^1(e, f) = 0$; par e on désigne une $(k, 1)$ -figure basique quelconque, telle que le prolongement désiré existe.

2. Applications aux variétés orientables à 3 dimensions.

Ce paragraphe reprend quelques considérations du chapitre II de [6]. Tout d'abord observons qu'un théorème classique de Stiefel [9], [10] nous assure que tout V_3 orientable est parallélisable. Donc $E_2(V_3) = V_3 \times V_{3,2}$; désignons par p_1 la projection $E_2(V_3) \rightarrow V_{3,2}$. Si f est une $(1, 1)$ -figure désignons par $m(f)$ le $p_1^* \Omega^1(f, e) \in \pi_1(V_{3,2}) = \mathbb{Z}^2$. (Le $m(f)$ ainsi défini, coïncide, comme on s'en peut convaincre sans peine avec le $m(f)$ de [6]). Nous empruntons à [6] les définitions suivantes:

Si K_n est un complexe pur à n dimensions et $q \in K_n$ un sommet on désignera par $\Sigma_n(K_n; q)$ l'ensemble des simplexes incidents à q , et par $\Sigma_{n-1}(K_n; q)$ la "frontière" de $\Sigma_n(K_n; q)$ c'est-à-dire l'ensemble des simplexes de $\Sigma_n(K_n; q)$ qui ne sont pas incidents à q .

Si V_3 est une variété à 3 dimensions et σ_2 une cellule bi-dimensionnelle quelconque de V_3 (on suppose V_3 triangulée), alors on désigne par σ'_2 une cellule ouverte contenue dans σ_2 telle que $\bar{\sigma}'_2 \cap F, \sigma_2 = \emptyset$. On désigne

$$V_3^2 = U(\sigma_2 - \sigma'_2)$$

V_3^2 est un complexe bi-dimensionnel ayant le même type d'homotopie que le squelette 1-dimensionnel de V_3 .

On appellera une "immersion des orientations" un homéomorphisme $F : V_3^2 \rightarrow E_3$ tel que:

$$(1^\circ) (\Sigma_2(V_3, q), V_3^2 \cap \Sigma_2(V_3, q)) = (\Sigma_2(E_3, F(q)), F(V_3^2) \cap \Sigma_2(E_3, F(q)))$$

$$(2^\circ) \text{ pour toute } (1, 1) \text{ figure de } V_3 \text{ (contenue dans } V_3^2) f,$$

$$m(f) = m(F(f))$$

On a:

THÉORÈME 3. *Toute V_3 orientable, admet une immersion des orientations.*

Démonstration. On peut considérer, sans perdre la généralité que le squelette 1-dimensionnel de V_3^2 est un bouquet de cercles C_1, C_2, \dots de sommet commun p .

Soit sur chaque C_i , p_i le point diamétralement opposé à p . Coupons V_3^2 au point p_i par une section transversale à C_i .

On obtient un complexe contractible qui peut être évidemment plongé dans E_3 , de telle manière que la condition 1° soit satisfaite. Il faut maintenant "recoller" les coupures au points p_i . On fait cela de telle manière que la condition $m(f_i) = m(F(f_i))$ soit satisfaite, f_i étant une $(1, 1)$ -figure dont le cercle-support est C_i . Alors, des relations algébriques de compatibilité faciles à écrire nous assurent que 2° est satisfaite pour toute $(1, 1)$ -figure.

Le théorème 3 permet de retrouver le théorème suivant de Whitehead [13]:

"*Toute variété orientable ouverte à 3 dimensions peut être immergée dans E_3 .*"

Pour prouver ce résultat on part d'une immersion des orientations (on n'utilise pas le squelette 2-dimensionnel, mais un souscomplexe de ce squelette qui soit rétracte de déformation de V_3), puis on ajoute des cellules immergées à 2 dimensions et, finalement, on "grossit" le résultat. La seconde opération est immédiate, la première est possible car les conditions de transversalité que doivent satisfaire les immersions sont satisfaites, vu 2° .

D'ailleurs, par un raisonnement qui ne présente pas de difficulté, on peut se convaincre que le théorème 3 et le théorème de Whitehead sont équivalents. Au dernier chapitre on prouvera un théorème beaucoup plus général. Néanmoins nous avons considéré qu'il n'est pas inutile d'insérer ici ces considérations.

Remarque. Vu que $\pi_1(V_{3,2}) = \pi_1(V_{4,3}) = \mathbb{Z}_2$ on voit facilement que les "constantes universelles" N, k de [6] sont $N = k = 2$ (résultat qui d'ailleurs, comme on l'a vu, est inutile pour [6]).

§4. QUELQUES APPLICATIONS (suite et fin)

Dans ce qui s'ensuit on va prouver le théorème suivant:

THÉORÈME 4. Soient V_n, M_p deux variétés différentiables, $p > n$, V_n étant supposée compacte. Toute immersion $f: V_n \rightarrow M_p$ se prolonge à une application canonique $F: P_V \rightarrow P_M$ ou par P_V, P_M on désigne les fibrés tangents à V_n, M_p . Pour que deux immersions f, g soient régulièrement homotopes, il faut et il suffit que F, G soient homotopes, par une homotopie compatible avec la fibration.

Pour $V_n = S_n, M_p = E_p$ ce théorème coïncide avec le résultat de Smale [8]. Il représente la solution d'une conjecture proposée par Ehresmann [2, 11].

1. Soient π, π^* les projections d'espace fibré: $\pi: P_V \rightarrow V, \pi^*: P_M \rightarrow M$. Désignons par F_t l'homotopie, compatible avec la fibration, qui relie $F, G: P_V \rightarrow P_M (F_0 = F, F_1 = G)$. On prouvera qu'on peut toujours supposer F_t de classe C^∞ (dans l'ensemble des variables).

En effet, prenons comme point de départ une homotopie F_t qu'on va modifier de telle façon qu'elle devienne de classe C^∞ .

Soit (U_i) un recouvrement ouvert de V_n , ayant les propriétés suivantes:

P_V est trivial au dessus de U_i ;

il existe un recouvrement (w_j) de $[0, 1]$ tel que P_M soit trivial audessus de $\pi^* F_t(w_j \times \pi^{-1}(U_i))$.

Considérons un recouvrement ouvert $W_{i,j}$ de $V \times [0, 1]$, tel que $\bar{W}_{i,j} \subset U_i \times w_j = W'_{i,j}$. En changeant le système d'indices désignons $W_{i,j}, W'_{i,j}$ par W_i, W'_i .

On peut toujours supposer que F'_t est de classe C^∞ sur $(V \times [0, \varepsilon]) \cup (V \times [1 - \varepsilon, 1])$ et que (W'_i) est un recouvrement ouvert de $V \times [\varepsilon, 1 - \varepsilon]$. On modifiera F'_t successivement sur $W'_1, W'_1 \cup W'_2, \dots$. Supposons que la modification $(F'_t)_i$ est déjà définie. On construit $(F'_t)_{i+1}$ de telle façon que:

$(F'_t)_{i+1} = (F'_t)_i$, en dehors de W'_{i+1} ;

$(F'_t)_{i+1}$ est de classe C^∞ sur W_{i+1} ;

$(F'_t)_{i+1}$ est aussi proche que l'on veut de (F'_t) .

Pour cela on prend un système fondamental de vecteurs: ξ_1, \dots, ξ_n de la fibre de $(\pi^{-1}(W'_{i+1}), \pi, W'_{i+1})$. On a, pour chacune de ces composantes une application:

$$F^j: W'_{i+1} \rightarrow E_p = \text{fibre de } (\pi^{*-1}(\pi^*(F_t(W'_{i+1})), \pi^*, \pi^*(F_t(W'_{i+1}))))).$$

$$F^j(\alpha) = (F'_t)_i(\xi_j \times \alpha) \quad \alpha \in W'_{i+1}$$

Il suffit maintenant d'appliquer à F^j le raisonnement classique de Steenrod [9] pour l'approximation des sections continues, par des sections de classe C^∞ .

2. Considérons maintenant la situation suivante. Soit B'_r un disque de frontière S'_{r-1} et B_r un second disque, concentrique au premier, de frontière S_{r-1} (assez proche de S'_{r-1}). De même soit B''_r de frontière S''_{r-1} concentrique à $B_r: B''_r \subset B_r \subset B'_r$.

Soit le cylindre

$$\Gamma_{r,q} = ([0, 1]^q \times B'_r) \cup ([-1, 0]^q \times B'_r)$$

dont on a “régularisé” les “angles” (voir par exemple le second chapitre de [3]).

De même soit :

$$\Lambda_{r,q} = ([0, 1]^q \times (B'_r - \text{int } B''_r)) \cup ([-1, 0]^q \times (B'_r - \text{int } B''_r))$$

Soit $r + q < p$ et Φ_0 une immersion $\Phi_0 : \Gamma_{r,q} \rightarrow M_p$. Soit de même $(\phi'_1)_t : [0, 1] \times \Lambda_{r,q} \rightarrow M_p$ une homotopie régulière, de classe C^∞ , de $\phi_0|_{\Lambda_{r,q}}$. Je dis que dans ces conditions il existe une homotopie régulière de classe C^∞ , $(\Phi_1)_t$ de Φ_0 , telle que :

$$\begin{aligned} (\Phi_1)_t|_{\Lambda_{r,q}} &= (\Phi'_1)_t \\ (\Phi_1)_t|_{B'_r - \text{int } B''_r} &= (\Phi'_1)_t|_{B'_r - \text{int } B''_r} \end{aligned}$$

(Cette proposition est un cas très particulier d'un théorème de relèvement des homotopies qui à première vue semble plus général que celui de Smale [8] et de Thom [11]. Il n'en est presque rien car les jets d'ordre supérieur à un sont, à une homotopie près, déterminés par les jets d'ordre un.)

Pour la démonstration, on va adapter une construction de Thom [11]. On procède ainsi: On considère le fibré normal (de fibre E_{p-r-q}) $X_{r,q}^p$ à $\Lambda_{r,q}$ induit par l'immersion $\Phi_0|_{\Lambda_{r,q}}$. Il existe une immersion canonique $f : X_{r,q}^p \rightarrow M_p$, telle que f appliquée à la section nulle de $X_{r,q}^p$ (que nous pouvons identifier à $\Lambda_{r,q}$), coïncide avec $\Phi_0|_{\Lambda_{r,q}}$. $f(X_{r,q}^p)$ est un voisinage de $\phi_0(\Lambda_{r,q})$ dans M_p . On peut considérer, sans perdre la généralité, qu'il existe une homotopie :

$$\psi_t : \Lambda_{r,q} \times [0, 1] \rightarrow X_{r,q}^p$$

telle que ψ_t est un plongement et que :

$$\begin{aligned} (\Phi'_1)_t &= f \circ \psi_t \\ (\text{donc } \Phi_0|_{\Lambda_{r,q}} &= f \circ \psi_0). \end{aligned}$$

Alors, pour que la démonstration soit terminée, il suffit de prouver qu'il y a une famille (de classe C^∞) de difféomorphismes : $H_t : X_{r,q}^p \rightarrow X_{r,q}^p$, tels que :

$$\begin{aligned} H_t|_{F_r X_{r,q}^p} &= \text{identité} \\ \Psi_t &= H_t \circ \Psi_0 \end{aligned}$$

Les difféomorphismes H_t peuvent être construits en exhibant un certain système dynamique que nous laissons au lecteur le soin de construire.

3. Reprenons les notations du second paragraphe, et considérons la situation suivante. Soient deux immersions $\Phi_0, \Phi_1 : \Gamma_{r,q} \rightarrow M_p$ telles que $\Phi_0|_{\Lambda_{r,q}}, \Phi_1|_{\Lambda_{r,q}}$ soient reliées par une homotopie régulière de classe C^∞ , ψ_t .

Soient Φ_0, Φ_1 les applications du fibré tangent à $\Gamma_{r,q}$, dans le fibré tangent à M_p induites par Φ_0, Φ_1 . De même, soient $\bar{\psi}_t$ les applications du fibré tangent à $\Lambda_{r,q}$ dans le fibré tangent à M_p , induites par les ψ_t .

Supposons que $\bar{\Phi}_0, \bar{\Phi}_1$ peuvent être reliées par une homotopie $\bar{\Phi}_t$, compatible avec les fibrations, qui coïncide avec les $\bar{\psi}_t$ audessus de $\Lambda_{r,q}$.

Je dis que dans ces conditions il existe une homotopie régulière, de classe C^∞ , Φ_t , reliant Φ_0 et Φ_1 , telle que:

$$\begin{aligned}\Phi_t|_{\Lambda_{r,q}} &= \psi_{t/2} & \text{pour } t \in [0, \tfrac{1}{2}] \\ \Phi_t|_{\Lambda_{r,q}} &= \Phi_1|_{\Lambda_{r,q}} & \text{pour } t \in [\tfrac{1}{2}, 1]\end{aligned}$$

En effet, on considère tout d'abord Φ_0 et ψ_t . Le paragraphe précédent nous permet de construire une homotopie régulière, de classe C^∞ , $\Phi'_t : \Gamma_{r,q} \rightarrow M_p$ telle que $\Phi'_t|_{\Lambda_{r,q}} = \psi_t$. Considérons l'immersion $\Phi'_1 : \Gamma_{r,q} \rightarrow M_p$. Pour les deux immersions Φ'_1, Φ_1 les conditions au voisinage de S_{r-1} coïncident. Tout-à-fait comme dans le second chapitre on peut définir pour ces deux immersions un invariant $\Omega'(\Phi'_1, \Phi_1)$.

On voit sans peine que $\Omega'(\Phi'_1, \Phi_1) = 0$. Φ'_1, Φ_1 peuvent être reliées par une homotopie régulière (qui vu le premier chapitre peut être considérée de classe C^∞) ayant les mêmes données que Φ_1, Φ'_1 sur un voisinage de S_{r-1} . Maintenant, il est facile de mener à bout la démonstration.

4. On va considérer que V_n est triangulée d'une façon compatible avec la structure différentielle. C'est-à-dire qu'on va considérer que chaque simplexe de dimension k est une sousvariété à bord (de classe C^∞) ayant des singularités sur les squelette de dimension $k - 2$. Si l'on considère un simplexe de dimension k , σ_k on peut toujours considérer une sphère $\sigma_{k-1}^\times \subset \sigma_k$, plongée de façon C^∞ dans $\text{int } \sigma_k$ et qui approche $\partial \sigma_k$ d'aussi près que l'on veut. C'est une construction de régularisation que nous laissons au lecteur le soin de mener à bout.

Désignons par Σ_k le squelette k -dimensionnel de V_n . Pour chaque Σ_k on peut construire un "voisinage tubulaire" Σ'_k sous-variété de classe C^∞ et de dimension n de V_n , contenant Σ_k . (C'est un voisinage de Σ_k .) Σ'_k admet Σ_k comme rétracte de déformation et la déformation respective a une forme particulièrement simple.

De même si R_k est une partie de Σ_k on peut considérer un "voisinage tubulaire" R'_k qui a vis-à-vis de R_k les mêmes propriétés que Σ'_k relativement à Σ_k .

Nous allons construire l'homotopie régulière dérivée, par un procédé d'induction suivant les squelettes de dimensions croissantes Σ_k de V_n .

En fait, nous allons construire successivement des homotopies régulières $\Phi'_i : [0, 1] \times \Sigma'_i \rightarrow M_p$, de classe C^∞ , telles que les conditions suivantes soient satisfaites:

- (1°) $\Phi'_i|_{\Sigma'_{i-1}} = \Phi'^{i-1}$ à un changement de paramètre près:
- (2°) Φ'_i relie $f|_{\Sigma'_i}$ à $g|_{\Sigma'_i}$
- (3°) Si σ est un simplexe de dimension i quelconque $\Phi'_i|_{\sigma \cap \Sigma'_{i-1}}$ coïncide (à un changement de paramètre près), avec $\Phi'^{i-1}|_{\sigma \cap \Sigma'_{i-1}}$.

(4°) Il existe une homotopie, compatible avec les fibrations: $F_t^i: P_V \rightarrow P_M$ reliant F, G , qui soit homotope à F_{σ}^i † et telle que F_t^i , audessus de Σ_i' coïncide avec l'homotopie $P_{\Sigma_i'} \rightarrow P_M$ induite par Φ_t^i .

Le premier pas de l'induction est très facile. Il s'agit tout simplement d'une homotopie régulière de boules de dimensions n . (Car Σ_0' est une réunion finie de telles boules, disjointes.) Chaque boule possède outre la structure C^∞ , une "structure" induite par l'étoile simpliciale du sommet attaché à la boule respective. Cette "structure" est déformée d'une façon continue pendant l'homotopie. Reste à effectuer le passage de $(i - 1)$ à i . C'est ce qu'on fera au paragraphe suivant.

5. Supposons que Φ_t^{i-1} est déjà construite. Pour construire Φ_t^i , avec les propriétés désirées, il suffit de considérer séparément chaque simplexe σ_i de dimension i .

Soit σ_i la frontière de σ_i, σ_i' , le voisinage tubulaire de σ_i est une partie de Σ_{i-1}' . Au lieu de considérer σ_i on peut considérer σ_{i-1}^x , définie comme au paragraphe précédent. Sans perdre la généralité on peut supposer que $\sigma_{i-1}^x \subset \sigma_i'$. Alors, σ_i' n'est autre chose que le voisinage tubulaire normal, proprement dit, de σ_{i-1}^x dans V_n . Ce voisinage est évidemment un fibré trivial

$$f|_{\overline{\text{int } \sigma_{i-1}^x}}, \quad g|_{\overline{\text{int } \sigma_{i-1}^x}}, \quad \Phi_t^{i-1}|_{\sigma_i'}$$

réalisent d'une façon évidente la situation du commencement du paragraphe 3. (On désigne par $\text{int } \sigma_{i-1}^x$ la partie de σ_i , intérieure à σ_{i-1}^x .) Le fait que la situation du paragraphe 3 est réalisée, résulte de l'existence de l'homotopie F_t^{i-1} .

Φ_t^i peut donc être construit sur chaque σ_i . Il peut donc être construit globalement, car il n'y a qu'un nombre fini de simplexes donc un nombre fini de changements de paramètres (c'est ici que la compacité de l'espace-source est utilisée).

Les propriétés 1°, 2°, 3° du paragraphe précédent sont vérifiées immédiatement. Reste à construire F_t^i . C'est ce qu'on fera au dernier paragraphe.

6. Pour construire F_t^i on revient de nouveau a paragraphe 3. Considérons l'homotopie F_t^{i-1} restreinte à σ_i (un simplexe de dimension i fixé) et l'homotopie $\bar{\Phi}_t^i$ restreinte de même à ce simplexe (on désignera par $\bar{\Phi}_t^i$ l'homotopie $P_V \rightarrow P_M$ induite par l'homotopie régulière $\bar{\Phi}_t^i$).

Je dis que ces deux homotopies (qui coïncident pour $t = 0, 1$) peuvent être déformées l'une dans l'autre de telle façon que pendant la déformation les conditions sur $t = 0, 1$ restent satisfaites.

Pour cela considérons tout d'abord le lemme 2 de [3]. Soient $w, w' \in \Gamma_k'(f_0)$, telles que $\Omega'(w, w') = 0$. Donc w, w' sont régulièrement homotopes. (Dans le second chapitre $\Omega'(\dots, \dots)$ est définie pour les (k, r) -figures basiques, mais, comme on l'a déjà observé $\Omega'(\dots, \dots)$ peut être définie, sans aucune difficulté, si les deux arguments sont des $(k, r) - B_k$ -figures dont les jets d'ordre 1 sur la frontière coïncident). $\Phi'(w), \Phi'(w')$ peuvent être reliés par deux homotopies: par l'homotopie x_t obtenue en projetant l'homotopie régulière par Φ' , et par l'homotopie obtenue en projetant tout d'abord w, w' par Φ' dans $(\Gamma')_k'$ et en

† Avec conservation des conditions pour $t = 0, 1$.

écrivant explicitement que $\Omega'(w, w') = 0$. On obtient une courbe fermée de l'espace $(\Gamma')_k^r$. Je dis que cette courbe est homotope à 0. En effet, on a la situation suivante: deux espaces Γ_k^r et $(\Gamma_k^r)'$ et une équivalence homotopique faible $\Phi' : \Gamma_k^r \rightarrow (\Gamma_k^r)'$. De plus, deux points $w, w' \in \Gamma_k^r$ liés par un arc λ de Γ_k^r . Les points $\Phi'(w), \Phi'(w')$ sont liés par un arc λ' de $(\Gamma_k^r)'$. Je dis que l'arc λ peut toujours être pris de telle manière qu'il y ait un disque singulier de $(\Gamma')_k^r$ de frontière $\lambda' - \Phi'(\lambda)$. Ceci résulte du fait que Φ' est une équivalence homotopique faible, de la manière suivante: Soit τ le "mapping-cylinder" de Φ' , $i : \Gamma \subset \tau$ l'inclusion naturelle, et $p : \tau \rightarrow (\Gamma')$ la retraction naturelle. On a $\pi_i(\tau, \Gamma_k^r) = 0$. La courbe $(w \times [0, 1]) + \lambda' + (w' \times [1, 0]) \subset \tau$ peut donc être déformée en une courbe λ de Γ_k^r , d'extrémités w, w' . λ est évidemment la courbe cherchée (car il suffit de projeter la déformation par p).

En utilisant la définition explicite de Φ_t^i (et sa construction, qui est donnée au paragraphe 3), et le raisonnement précédent, on voit que F_t^{i-1}, Φ_t^i sont homotopes, dans le sens indiqué plus haut.

Une construction habituelle nous permet alors de construire une homotopie F_t^i , qui coïncide sur Σ_t^i avec Φ^i et qui peut être déformée en F_t (avec conservation des conditions pour $t = 0, 1$).

La démonstration est ainsi terminée.

§5. SUR L'IMMERSION D'UNE VARIÉTÉ PARALLÉLISABLE, OUVERTE n-DIMENSIONNELLE DANS E_n

Ce dernier chapitre est consacré à la démonstration du théorème suivant.†

THÉORÈME 5. *Toute variété n-dimensionnelle, parallélisable, ouverte, peut être immergée dans E_n .*

Ce théorème représente plus ou moins un résultat définitif, car:

Il implique immédiatement que toute variété parallélisable compacte, à bord $\neq 0$, de dimension n , peut être immergée dans E_n ;

Si une variété de dimension n peut être immergée dans E_n , elle est sûrement parallélisable;

Une variété compacte, de dimension n , dont le bord est \emptyset ne peut pas être immergée dans E_n (elle peut du reste sûrement être immergée dans E_{n+1} d'après Hirsch).

1. Nous allons reprendre quelques notations du chapitre précédent. Si V_n est une variété n -dimensionnelle on désignera par Σ_k son squelette k -dimensionnel, par Σ'_k son "voisinage tubulaire" (qui est une variété ouverte de dimension n , admettant Σ_k comme rétracte de déformation. La déformation, comme on l'a déjà dit, prend une forme particulièrement simple). Si R_k est une partie de Σ_k , on désignera de même par R'_k son "voisinage tubulaire", qui a les mêmes propriétés vis-à-vis de R_k , que Σ'_k vis-à-vis de Σ_k .

Je dis que si V_n est ouverte, il existe un sous-complexe $R_{k-1} \subset \Sigma_{k-1}$, tel que:

Si τ^i est un simplexe de R_{k-1} de dimension $i < k-1$, il est face d'un simplexe σ_{i+1} de dimension $i+1$, de R_{k-1} . (Dans ces conditions, on dira que R_{k-1} est "pur".)

† Ce théorème a été prouvé récemment, d'une autre manière par Hirsch.

V_n admet R_{k-1} comme rétracte de déformation, et la déformation prend une forme particulièrement simple. Même plus, V_n est difféomorphe à R'_{k-1} .

On prouve tout d'abord cette assertion pour le cas où $V_n = \text{int } W_n$, W_n étant une variété compacte à bord, de bord F_{n-1} .

En ce cas, en effet, on suppose (W_n, F_{n-1}) douée d'une triangulation compatible avec la structure différentiable, ce qui est toujours possible [14]. On définit par induction une suite de sous-complexes de W_n : $K_0 \supset K_1 \supset \dots \supset K_f$ tels que :

$$K_0 = W_n;$$

$$\text{Lim } K_i = n \ (i < f);$$

$$K_{i-1} - K_i = \sigma_i = \text{un simplexe de dimension } n;$$

$$K_f \text{ a la dimension } n - 1;$$

K_i admet K_{i-1} comme rétracte de déformation et la rétraction admet une structure particulièrement simple (qui sera explicitée pendant la démonstration).

Supposons que K_{i-1} soit déjà construit. Pour des raisons homologiques très simples, si $\dim K_{i-1} = n$, il existe au moins un simplexe de dimension n , σ_i de K_{i-1} qui ait une face $\dot{\sigma}_{i-1}$ telle que : il n'y a aucun autre simplexe n -dimensionnel de K_{i-1} qui admette $\dot{\sigma}_{i-1}$ comme face. Alors on pose $K_i = \overline{K_{i-1} - \sigma_i}$. La déformation est définie ainsi : on fait passer par chaque point de $\dot{\sigma}_{i-1}$ un segment parallèle à la médiane qui correspond à $\dot{\sigma}_{i-1}$ et on le prolonge jusqu'à ce qu'il rencontre $Fr\sigma_i - \dot{\sigma}_{i-1}$. Ces segments définissent la déformation sur $\sigma_i \subset K_{i-1}$. Sur $K_i - \sigma_i$ elle est définie par l'identité.

Maintenant revenons au cas général. Si V_n est ouverte on prouve tout d'abord qu'il existe une suite de variétés compactes à bord, contenues dans V_n : V_{i_1, i_2}, \dots, i_f telles que $\cup V = V_n$, les $\text{int } V$ sont disjoints. $FrV_{i_1} \dots i_f$ a $N + 1$ composantes connexes. L'une est collée à $FrV_{i_1} \dots i_{f-1}$, les autres aux $FrV_{i_1} \dots i_{f+1}$ ($i_{f+1} = 1, \dots, N$). Les V forment donc un ensemble filtrant, auquel on peut appliquer, par induction, le raisonnement précédent.

Pour prouver notre théorème il suffit donc de considérer $R_{k-1} \subset V_n$. On aura $R'_{k-1} = V_n$ et il suffira de prouver que R'_{k-1} peut-être immergé dans E_n . C'est ce qu'on fera.

2. Désignons les squelettes consécutifs de R_{k-1} par R_0, R_1, \dots . Dans ce paragraphe nous allons immerger R'_1 dans E_n , d'une façon qui généralise "l'immersion des orientations".

Pour simplifier, supposons que $R_1 \subset R'_1$ est un bouquet de cercles C_1, C_2, \dots (il est facile de voir que ceci n'enlève rien à la généralité), de sommet P .

Comme V_n est parallélisable son fibré tangent est de la forme $V_n \times V_{n,n} = V_n \times O_n$.

Désignons par p la projection : $p : V_n \times O_n \rightarrow O_n$. Le fibré tangent à R'_1 est de la forme $R'_1 \times O_n$.

Nous voulons définir une immersion : $\psi : R'_1 \rightarrow E_n$ telle que la propriété suivante soit satisfaite les deux applications :

$$R'_1 \times O_n \rightarrow V_n \times O_n \text{ obtenues :}$$

en considérant l'application fibrée $R'_1 \times O_n \rightarrow V_n \times O_n$ et en composant avec p ;

en considérant l'immersion ψ et l'application $R'_1 \times O_n \rightarrow O_n$ qui en résulte, sont homotopes.

Pour cela il suffit que l'immersion ψ ait la propriété suivante: Pour chaque cycle γ_1 de R_1 on considère une $(1, n-2)$ -figure $\rho(\gamma_1)$ de support γ_1 . $\rho(\gamma_1)$ est caractérisée par un élément de $\pi_1(V_{n,n-1}) = Z_2$. (En fait elle est caractérisée par un $\Omega^{n-2} \in \pi_1(E_{n-1}(V_n)) = \pi_1(V_n \times V_{n,n-1})$ mais on considère $p: V_n \times V_{n,n-1} \rightarrow V_{n,n-1}$ et $p^* \Omega^{n-2}$.)

On demande que l'élément de $\pi_1(V_{n,n-1})$ attaché à $\psi(\rho(\gamma_1))$ soit le même que celui attaché à $\rho(\gamma_1)$. Or pour cela il suffit de considérer une $(1, n-2)$ -figure ξ_i , attachée à chaque C_i , et demander que la condition énoncée précédemment soit satisfaite pour chaque $(1, n-2)$ -figure de support C_i . D'autre part, si $\rho(\gamma_1)$ est une $(1, n-2)$ -figure de R_1

$$\rho(\gamma_1) = \xi_{i_1} + \dots + \xi_{i_r},$$

où l'addition est comprise dans le sens de la structure additive naturelle des (k, r) -figures, dont on parlait au II chapitre.

Par un calcul immédiat, on arrive au résultat.

On choisit donc une $(1, n-2)$ -figure quelconque de support C_i . On considère sur chaque C_i le point P_i diamétralement opposé à P . Par chaque P_i , passe une cellule à $n-1$ dimensions B^i , transversale à C_i , et à ξ_i , et que sépare R'_i , au voisinage de P_i . En coupant R'_i suivant chaque B^i , on obtient une cellule à n -dimensions.

Celle-ci peut-être plongée dans E_n .

Reste à recoller les deux exemplaires de B^i . On peut toujours le faire de telle façon que la $(1, n-2)$ -figure de E_n , obtenue de ξ_i , soit caractérisée par un élément de $\pi_1(V_{n,n-1})$ donné d'avance.

3. Supposons maintenant que les simplexes de dimensions > 1 aient été ordonnés suivant une famille d'indices appartenant à un ensemble bien ordonné M , de telle façon que, si $\lim \sigma_i > \lim \sigma_j$, $i > j$. Désignons par T_χ le sous-complexe de R_{k-1} obtenu en considérant la réunion de R_1 et des simplexes d'indice $\leq \chi$.

Par induction on va construire une suite d'immersions $\psi_x: T'_\chi \rightarrow E_n$ telles que les conditions suivantes soient satisfaites:

1°. $\psi_0 = \psi$.

2°. Si $\tau < \chi$, $\psi_x|_{T'_\tau} = \psi_\tau$.

3°. L'espace tangent à T'_χ est évidemment $T'_\chi \times O_n$.

On demande que les deux applications suivantes: $T'_\chi \times O_n \rightarrow O_n$ soient homotopes (par une homotopie compatible avec les homotopies analogues correspondant aux indices inférieurs):

$$\begin{aligned} T'_\chi \times O_n &\rightarrow V_n \times O_n \xrightarrow{q} O_n \\ T'_\chi \times O_n &\xrightarrow{\psi_\chi} E_n \times O_n \xrightarrow{q} O_n \end{aligned}$$

4. On procédera par induction. Si $\chi-1$ n'existe pas, il n'y a aucune difficulté. Si $\chi-1$ existe $T_\chi - T_{\chi-1} =$ un simplexe de dimension i , σ , dont les faces sont dans $T_{\chi-1}$.

Soient dans σ deux sphères de dimension $i-1$, de classe C^∞ , approximant $\text{Fr } \sigma: \sigma_1, \sigma_2$ ($\sigma_1 \subset \text{int } \sigma_2$). $\sigma' = \sigma \times E_{n-i}$ et ψ_χ est définie sur $(\sigma - \text{int } \sigma_2)' = (\sigma - \text{int } \sigma_1) \times E_{n-i}$ où elle

coincide avec ψ_{x-1} . Cette dernière est déjà définie sur $(\sigma - \text{int } \sigma_1)'$. Soit α une petite cellule $(i-1)$ -dimensionnelle de σ_1 . Soit une petite sphère, de classe C^∞ , σ_3 , telle que $\sigma_3 \cap \sigma_2 = \alpha$, $\sigma_3 \subset \text{int } \sigma_2 - \text{int } \sigma_1$. $(\sigma - \text{int } \sigma_1)'$ induit deux $(i-1, n-i+1)$ -figures basiques de supports $\sigma_2, \sigma_3 : \gamma_2, \gamma_3$ (les premiers champs sont les champs transversaux induits par σ). Il existe une $(i, n-i) - B_i$ -figure $\bar{\gamma}_3$ de support $\text{int } \sigma_3$, de $(\sigma - \text{int } \sigma_1)' : \pi \bar{\gamma}_3 = \gamma_3$.

Dans $T'_x \subset V_n$, $\Omega^{n-i+1}(\gamma_2, \gamma_3) = 0$ car γ_2, γ_3 sont basiquement régulièrement homotopes, par une homotopie de support $\text{int } \sigma_2 - \text{int } \sigma_3 \subset \sigma$. Donc $p^* \Omega^{n-i+1}(\gamma_2, \gamma_3) = 0$ ce qui exprime une certaine homotopie dans $V_{n,n} = O_n$. Considérons $q : E_n \times O_n \rightarrow O_n$ (projection). L'homotopie dont on vient de parler, peut être considérée pour $\psi_{x-1}(\gamma_2), \psi_{x-1}(\gamma_3)$ (vu les conditions de compatibilité, de ψ_{x-1}).

Donc $q^* \Omega^{n-i+1}(\psi_{x-1}(\gamma_2), \psi_{x-1}(\gamma_3)) = 0$. Mais q^* étant un bimorphisme:

$\Omega^{n-i+1}(\psi_{x-1}(\gamma_2), \psi_{x-1}(\gamma_3)) = 0$ (dans E_n). Ceci dit, vu que $\psi_{x-1}(\gamma_3) \in \text{Im } \pi$ on a que $\psi_{x-1}(\gamma_2) \in \text{Im } \pi$. C'est-à-dire qu'il existe une $(i, n-1) - B_i$ -figure de E_n , β , $\pi(\beta) = \psi_{x-1}(\gamma_2)$. On peut toujours supposer que β coïncide, sur un voisinage assez petit de σ_2 avec $\psi_{x-1}(\text{int } \sigma_2)$. On supposera donc que $(\text{support } \beta) \cup \psi_{x-1}(\sigma - \text{int } \sigma_2)$ définit l'immersion ψ_x . Elle se définit immédiatement pour $\sigma'. 1^\circ, 2^\circ$ se vérifient immédiatement.

Reste à vérifier 3° , donc que les deux applications dont on parlait à 3° sont homotopes:

la première est obtenue ainsi: on écrit que dans V_n il existe une $(i, n-i) - B_i$ -figure qui prolonge la $(i-1, n-i+1)$ -figure γ_2 et qui contient γ_3 . (C'est la définition de σ .) Cette relation, devient dans $E_n \times O_n$ une homotopie régulière de $\psi_{x-1}(\gamma_2), \psi_{x-1}(\gamma_3)$ à laquelle on ajoute "le couvercle" $\pi(\psi_{x-1}(\bar{\gamma}_3)) = \gamma_3$. (C'est ce qui nous a permis d'écrire en E_n :

$$\Omega^{n-i+1}(\psi_{x-1}(\gamma_2), \psi_{x-1}(\gamma_3)) = 0$$

La seconde des deux applications est l'application $\beta' \times O_n \rightarrow E_n \times O_n \rightarrow O_n$, obtenue en "intégrant" l'application précédente et en "différentiant" de nouveau. Pour voir que les deux applications sont homotopes il suffit d'analyser la démonstration du théorème 2.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. DOLD and R. THOM: Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte, *Ann. Math., Princeton* **67** (1958), 239-281.
2. CH. EHRESMANN: Variétés plongées, *C.R. Acad. Sci., Paris* **226** (1948).
3. M. W. HIRSCH: Immersions of manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.* **93** (1959), 242-276.
4. M. Kervaire: Sur le fibré normal à une sphère immergée dans un espace euclidien, *Comment. Math. Helvet.* **33** (1959), 121-131.
5. J. MILNOR: Differentiable manifolds which are homotopy spheres (mimeographed), Princeton (1959).
6. V. POÉNARU: Sur quelques propriétés des variétés simplement connexes à 3 dimensions (to be published).
7. G. DE RHAM: Factorisations topologiques du disque à cinq dimensions, *Séminaire de Topologie*, Lausanne (1961).
8. S. SMALE: The classification of immersions of spheres in Euclidean spaces, *Ann. Math., Princeton* **69** (1959), 327-344.
9. N. E. STEENROD: *The topology of Fibre bundles*, Princeton University Press, 1951.
10. E. STIEFEL: Richtungsfelder und Fernparallelismus in mannigfaltigkeiten, *Comment. Math. Helvet.* **8** (1936), 3-51.

11. R. THOM: La classification des immersions, *Séminaire Bourbaki* 1957.
12. R. THOM: Quelques propriétés globales des variétés différentiables, *Comment. Math. Helvet.* **28** (1954), 17–86.
13. J. H. C. WHITEHEAD: The immersion of an open 3-manifold in Euclidean 3-space, *Proc. Lond. Math. Soc.* **41** (1961), 81–90.
14. J. H. C. WHITEHEAD: On C^1 -complexes, *Ann. Math., Princeton* **41** (1940), 809–824.
15. M. W. HIRSCH: On imbedding differentiable manifolds in Euclidean space, *Ann. Math., Princeton* **73** (1951), 613–623.

*Institutul de Matematică,
Str. M. Eminescu 47,
Bucuresti 3,
Rumania*